

2 Algebraické výrazy

Žák dovede:

2.1 Algebraický výraz

- určit hodnotu výrazu;
- určit nulový bod výrazu;
- určit definiční obor výrazu;
- sestavit výraz, interpretovat výraz;
- modelovat reálné situace užitím výrazů.

2.2 Mnohočleny

- užít pojmy člen, koeficient, stupeň mnohočlenu;
- provádět operace s mnohočleny, provádět umocnění dvojčlenu pomocí vzorců;
- rozložit mnohočlen na součin vytýkáním a užitím vzorců.

2.3 Lomené výrazy

- provádět operace s lomenými výrazy;
- určit definiční obor lomeného výrazu.

2.4 Výrazy s mocninami a odmocninami

- provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny;
- určit definiční obor výrazu s mocninami a odmocninami.

Zjednodušte výrazy:

1. $2a - \frac{2}{4}a - \frac{7}{8}a =$

2. $6b \cdot \frac{1}{2}b =$

3. $(c^3 - c) : (c - 1) =$
pro $c \neq 1$

Výraz (s proměnnou $a \in \mathbb{R}$) zjednodušte tak, aby neobsahoval závorky.

$$3[a - a(a - 1)]^2 =$$

Výraz s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ rozložte na součin.

$$x^2 + 16x + 64 =$$

Proved'te:

$$(3x^2 - 12)^2 =$$

Pro $x, y \in \mathbb{R}$ rozložte na součin dvojčlenů:

$$25x^2 - 9y^4 =$$

Vytkněte a rozložte na součin:

$$3y^2 - 12 =$$

Pro $y \in \mathbb{R}$ proved'te:

$$(y^2 - 2)^3 =$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proved'te umocnění a upravte:

$$\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{6}\right)^2 =$$

|

Doplňte do rámečků taková celá čísla, aby platila rovnost:

$$(3x + \square)^2 = \square x^2 + 60x + \square$$

Jaký je součet všech tří čísel doplněných do rámečků?

- A) 23
- B) 113
- C) 119
- D) 939
- E) jiný součet

Pro libovolné $a \in \mathbf{R}$ platí rovnost:

$$(3a - 2)^2 - 6a^2 + \square = 3a^2 + 4$$

Určete chybějící člen v rámečku

Dělte $(r^3 - 2r^2 - 9r + 18) : (r - 3)$ a stanovte, pro která reálná čísla r má dělení smysl.

Vyjádřete jednu polovinu rozdílu výrazů $\frac{15n}{6}$ a $\frac{15n}{8}$ v uvedeném pořadí v co nejjednodušším tvaru ($n \in \mathbb{N}$).

Pro $x \in \mathbb{R}$ proveďte:

$$\frac{5x - 6}{6} - \left(\frac{x}{6} - \frac{12x}{9} \right) =$$

Odstraňte závorky a zjednodušte ($n \in \mathbb{N}$):

$$2 \left(3 - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \right) \left(3 + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \right) =$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ proveďte:

$$2 + \frac{x - 1}{1 - x} =$$

Výraz s proměnnou $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$ maximálně zjednodušte:

$$\frac{y - \frac{4}{y}}{\frac{4}{y} + 2} =$$

Upravte výraz pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) =$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ upravte:

$$\frac{n+4}{4n+8} + \frac{1}{n^2+2n} =$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ zjednodušte:

$$3x \cdot \frac{2x-4}{6} - \left(\frac{x}{3}\right)^2 =$$

4 Pro $y \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1; 2\}$ zjednodušte:

$$\frac{y - 1 - \frac{1}{y - 1}}{2y^2 - 4y} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; 5\}$ zjednodušte:

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{5}{a^2}}{3a - 15} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$ zjednodušte:

$$\frac{1 + \frac{3}{a}}{\frac{a^2}{3} - 3} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $n \in \mathbb{N}$ zjednodušte:

$$\frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{2n^2}} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbb{R}$ upravte výraz a uveďte podmínky.

$$\frac{4a - \frac{1}{a}}{4a + 2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

5 Uved'te podmínky pro $a \in \mathbb{R}$, sečt'ete a zjednodušte:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1-a^2}{3a+6}$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{0,5; 1\}$ zjednodušte:

$$(a - 1) : \left(2 - \frac{2}{2a - 1}\right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

4 Pro $a \in \mathbb{R}$ zjednodušte výraz a uveďte podmínky.

$$\frac{2 - \frac{2}{a-2}}{\frac{1}{a-2} - 1} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbf{N}$ upravte výraz:

$$\left(2 - \frac{1}{a+1}\right) : (2a+1) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

- 4** Pro $a \in \mathbb{R}$ výraz zjednodušte a uveďte podmínky, pro něž má výraz smysl.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{9}\right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

— |
—

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ zjednodušte:

$$(2 + a) \cdot \left(\frac{8}{4 - a^2} - \frac{2}{2 - a} \right) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 1; 2\}$ zjednodušte:

$$\left(a - 1 - \frac{1}{a - 1}\right) \cdot \frac{a - 1}{a \cdot a - 4} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

- 4** Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ upravte na co nejjednodušší tvar (výsledný výraz nesmí obsahovat závorky):

$$\frac{\frac{a+6}{a-2} + 1}{2} \cdot (a^2 - 4a + 4) =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; 2\}$ zjednodušte:

$$\left(2 - \frac{2a}{a-2}\right) : \frac{a}{2a-4} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

4 Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ zjednodušte:

$$\frac{5a}{5-a} - \frac{10a^2}{25-a^2} =$$

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Pro $n \in \mathbf{N}$ je dán lomený výraz:

$$\frac{2n - \frac{1}{3}}{3\left(1 + \frac{n}{9}\right)}$$

Lomený výraz rozšiřte číslem 3 a odstraňte závorky.

Rozšířením lomeného výrazu $\frac{4}{3-n}$, kde $n \in \mathbf{N} \setminus \{3\}$, dostáváme

$$\frac{\odot}{18 - 2n^2}.$$

Zapište výraz, kterým nahradíte v čitateli symbol \odot .

Určete podmínky výrazu:

$$\frac{c^2 - 4}{c^2 + 2c} \cdot \frac{c}{c^2 + 4}$$

- A) $c \neq \pm 2$
- B) $c \neq 0; c \neq \pm 2$
- C) $c \neq 0; c \neq 2;$
- D) $c \neq 0; c \neq -2$
- E) Žádné z uvedených podmínek nejsou správné.

Pro $x \in \mathbb{R}$ určete podmínky výrazu:

$$1 + \frac{x - 3}{3 - \frac{x}{2}}$$

3 Je dán výraz:

$$\left(\frac{9}{3} \cdot \sqrt{\frac{9-x}{9}}\right)^2$$

3.1 Uvedte všechny hodnoty $x \in \mathbf{R}$, pro něž má výraz smysl (podmínky).

3.2 Výraz zjednodušte do tvaru dvojčlenu.



4 Je dán výraz:

$$\frac{b}{b+2} - \frac{b^2 - 2b}{4 - b^2}$$

Která z úprav včetně podmínek je správná?

A) $\frac{2b}{b+2}$; $b \neq -2$; $b \neq 2$

B) 0 ; $b \neq -2$; $b \neq 4$

C) $\frac{2b}{b-2}$; $b \neq -2$; $b \neq 2$

D) $\frac{b}{b+2}$; $b \neq -2$; $b \neq 2$

E) žádná z uvedených

Přiřadte každému výrazu (25.1–25.4) s reálnou proměnnou x definiční obor výrazu (A–F).

$$\log x \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2^x \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{2} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{4} \cdot x} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- A) **R**
- B) $(0; +\infty)$
- C) $(2; +\infty)$
- D) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
- E) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
- F) jiná množina

Je dán výraz $\frac{2}{x^2 - x + 2}$.

Pro které reálné hodnoty proměnné x výraz není definován?

- A) pro $x = 0$
- B) pro $x = 1$ a pro $x = -2$
- C) pro $x = -1$ a pro $x = 2$
- D) pro jiné dvě hodnoty
- E) Výraz je definován pro všechna reálná čísla.

Úloha 2

Upravte výraz $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2}$ a určete jeho definiční obor.

Řešení: $x + 2; \mathbf{R} \setminus \{-1; 2\}$

Pro reálné hodnoty x , kde $x \neq -0,5$, je dán výraz:

$$1 - \frac{x - 1}{2x + 1}$$

Vypočtěte hodnotu výrazu pro $x = \frac{1}{2}$.

Pro kterou hodnotu proměnné x je výraz roven nule?

Je dán výraz $\frac{x^2}{x-1}$ s neznámou $x \in \mathbf{R}$.

Jaká je hodnota výrazu pro $x = \sqrt{3} - 1$?

A) $5 + \sqrt{3}$

B) $-0,5 - \sqrt{3}$

C) -2

D) $-2,2$

E) -3

3 Je dán výraz:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}$$

- 3.1 Určete, pro které hodnoty $x \in \mathbf{R}$ má výraz smysl, a výraz zjednodušte.
- 3.2 Určete hodnotu výrazu pro $x = 0$.
- 3.3 Určete hodnoty proměnné $x \in \mathbf{R}$, pro které má výraz hodnotu 0.
- 3.4 Určete hodnoty proměnné $x \in \mathbf{R}$, pro které má výraz hodnotu 1.

Je dán výraz:

$$\frac{4(y^2 + 1)(2y - 3)}{2y + 4}$$

Určete množinu všech $y \in \mathbb{R}$, pro která má výraz hodnotu 0.

Je dán výraz:

$$\frac{2c + 12}{2 - c} \cdot (6 - c)$$

Určete všechny hodnoty $c \in \mathbb{R}$, pro které je hodnota výrazu rovna nule.

Úloha 4

Výraz $V(x) = (x - 2) \cdot (x + 1)$ je definován pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

- 4.1 Pro která x je hodnota výrazu $V(x)$ nulová?
- 4.2 Určete nejmenší hodnotu výrazu $V(x)$.

Přiřad'te k výrazům (26.1–26.3) jejich ekvivalentní vyjádření (A–E):

$$4 - x^2 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(1 - 2x)^2 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(x - 2)(2x - 2) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- A) $(1 - 2x)(1 + 2x)$
- B) $(x - 1)(2x - 4)$
- C) $(2 + x)(2 - x)$
- D) $(2x - 1)(2x - 1)$
- E) žádné z uvedených

Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ platí:

$$A = \frac{4}{3} : (2 : x)$$

$$B = 2 \cdot (x : 6)$$

(CZVV)

2 body

17 Který z následujících výrazů je pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní s výrazem $2A + B$?

A) $\frac{5x}{3}$

B) $\frac{5x}{4}$

C) $\frac{15}{x}$

D) $\frac{52}{3x}$

E) žádný z uvedených

Jsou dány dva výrazy $\frac{x}{x+1}$; $\frac{-1}{x^2+x}$ s proměnnou $x \in \mathbf{R}$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

Pro $x = -1$ má první z obou výrazů smysl.

A	N
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Pro $x = 1$ má druhý z obou výrazů smysl.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

Společný jmenovatel obou výrazů může být $x^2 + x$.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

Součet obou výrazů je roven $\frac{x-1}{x}$.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

Je dán výraz $\frac{12(a-2)^2}{12-6a}$ s reálnou proměnnou a .

Které tvrzení je pravdivé?

- A) Pro $a = 101^8$ je výraz kladný.
- B) Pro $a = 2$ je hodnota výrazu 0.
- C) Hodnota výrazu nemůže být nikdy nulová.
- D) Pro všechna $a \neq \frac{1}{6}$ je výraz roven $\frac{(a-2)^2}{1-6a}$.
- E) Pro některá a je výraz roven $2(a-2)$.

Pro $x, y \in \mathbf{R}$ platí:

$$x > 0, y = -5$$

Který z následujících výrazů může být za výše uvedených podmínek pro některé hodnoty x kladný?

- A) $\frac{1}{x} + y$
- B) $y - x^2$
- C) $y - x$
- D) xy
- E) $\frac{x^2}{y}$

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- | | A | N |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 16.1 Všem třem osobám je dohromady $(144 + m - d)$ let. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.2 Babička je $(72 : m)$ krát starší než Marek. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.3 Eva je o $(72 + d - m)$ let mladší než Marek. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 16.4 Když se narodila Eva, Markovi bylo $(m + d - 72)$ let. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pro všechny hodnoty $a, b \in \mathbb{N}$ pravdivé (A), či nikoli (N).

	A	N
16.1 $\frac{3+b}{a+2} = \frac{3}{a} + \frac{b}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

16.2 $\frac{a+2}{b} = \frac{a}{b} + \frac{2}{b}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--	--------------------------	--------------------------

16.3 $\frac{a \cdot 3}{2 \cdot b} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{b}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--	--------------------------	--------------------------

16.4 $\frac{a \cdot 2}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2}{b}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--	--------------------------	--------------------------

2 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (2.1–2.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

- | | A | N |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 2.1 Pro každá dvě reálná čísla a, b platí $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2.2 Pro každé reálné x platí $(-3 - x)^2 = 9 + 6x + x^2$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2.3 Pro každé reálné $a \neq 1$ platí $1 - a \cdot \frac{1-a}{a-1} = a + 1$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2.4 Pro každé reálné $c \neq 2$ platí $\frac{2-c^2}{c-2} = 2 + c$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je **pravdivé (ANO)**, nebo **nepravdivé (NE)**.

Pro **všechna** kladná čísla k platí:

$$9.1 \quad k - k^2 + k^3 = k[1 - k(1 + k)]$$

$$9.2 \quad (k^2 - k)(k - 2) = k(k^2 + k - 2)$$

$$9.3 \quad 3 \cdot \frac{2}{k} \left(\frac{k}{6} + 2k \right) = 13$$

$$9.4 \quad \frac{4k - 3}{2k + 2} = 1 + \frac{k - 2,5}{k + 1}$$

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), je-li pravdivé (A) pro všechna $a > b > 0$, či nikoli (N).

16.1 $(ab - 2a)^2 = a^2(b - 2)^2$

A	N
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

16.2 $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

16.3 $\frac{a^{50}}{a^{10}} = a^5$

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

16.4 $a \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

Přiřaďte ke každému výrazu (26.1–26.3) jeho ekvivalentní vyjádření (A–E).

$$(a^{-1} \cdot a^2)^3$$

$$\left(\frac{a^{-4}}{a^{-1}}\right)^{-2}$$

$$\sqrt{a^4 \cdot a^{12}}$$

A) a^3

B) a^4

C) a^6

D) a^8

E) a^{-6}

4 Pro $a \in \mathbf{R}$ je dán výraz:

$$\frac{a - a^{-1}}{a^0 - a^2}$$

4.1 Výraz zjednodušte.

4.2 Určete, pro která reálná čísla a má výraz smysl (tj. podmínky).

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

Výraz s nenulovými reálnými proměnnými x, y maximálně zjednodušte:

$$(x^2y)^3 \cdot (xy^3)^{-3} =$$

Pro $y \in \mathbb{R}$ zjednodušte:

$$\frac{(2 \cdot y^2)^{100} \cdot y^{100}}{(2^4)^{50}} =$$

POKYN K ÚLOHÁM 2 A 3

Číselné výrazy vyjádřete jediným členem s mocninou o stejném základu jako v zadání.

2 $5 \cdot 4^{18} - 4^{19} =$

3 $10^{n+1} - 3 \cdot 10^n =$

Zjednodušte výraz:

$$4^x(4^{x+1} - 3 \cdot 4^x) =$$

Pro $a \in (0; +\infty)$ zjednodušte:

$$\sqrt{16 \cdot a^{16}} \cdot \sqrt[3]{a^{-3}} =$$

Pro $a \in (0; +\infty)$ zjednodušte výraz:

$$\frac{(a^3)^{100}}{a^{100} \cdot \sqrt{a^{-100}}} =$$

Pro všechna reálná čísla $x \in \langle 0; +\infty \rangle$ je možné výraz $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x^5}$ upravit do tvaru x^k , kde $k \in \mathbf{N}$.
Jaká je hodnota k ?

Pro všechna reálná čísla $x \in \langle 0; +\infty \rangle$ je možné výraz $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ upravit do tvaru $\sqrt[k]{x}$, kde $k \in \mathbf{N}$.
Jaká je hodnota k ?

Vlak má tři vagony, všechny se stejným počtem míst. V každém vagonu je o 20 míst k stání více než k sezení.

Při odjezdu z Roztok byl vlak zaplněn přesně do poloviny své kapacity. V prvním a posledním vagonu byla všechna místa k sezení obsazená, ale ve druhém vagonu zůstalo 25 % míst k sezení volných.

(Kapacita vlaku je součet počtu všech míst k stání a sezení. Každý cestující obsadil buď jedno místo k stání, nebo jedno místo k sezení.)

(CZVV)

max. 2 body

3 Počet **míst k sezení** v jednom vagonu označme n .

Vyjádřete v závislosti na veličině n počet všech cestujících, kteří při odjezdu z Roztok

3.1 byli ve vlaku;

3.2 ve vlaku stáli.

Dva mniši opisovali rukopisy. Každý z nich pracoval stále stejným tempem.
Mladší Dominik opsal za každý **týden** n stránek rukopisu ($n \in \mathbf{N}$). Starší Alfons byl pomalejší a každý týden opsal o třetinu méně stránek než Dominik.

(CZVM)

max. 2 body**6**

- 6.1 Určete v závislosti na n , **kolik stránek** celkem opsali oba mniši za 3 týdny.
- 6.2 Určete, za **kolik týdnů** opsali oba mniši celkem $100n$ stránek rukopisu.